Automatische Sichtprüfung und Bildverarbeitung

Beiblätter zur Vorlesung

Prof. Dr.-Ing. J. Beyerer

August 18, 2014

1 Die Fouriertransformation

1.1 Eindimensional

Definition: $$G(f) := \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f x}\, \mathrm{d}x =: \mathcal{F}\{g(x)\}$$

Umkehrung: $$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f x}\, \mathrm{d}f = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\}$$

Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f$

$[x] = [f]^{-1}$, $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$

1.2 n-dimensional

Definition: $$G(\mathbf{f}) := \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}\, \mathrm{d}\mathbf{x} =: \mathcal{F}\{g(\mathbf{x})\}$$

Umkehrung: $$g(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{f})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}\, \mathrm{d}\mathbf{f} = \mathcal{F}^{-1}\{G(\mathbf{f})\}$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n$

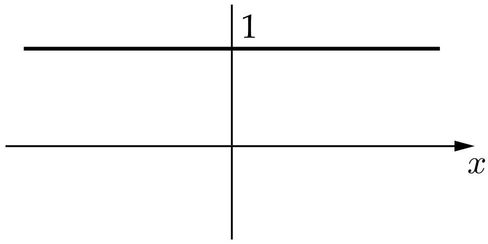
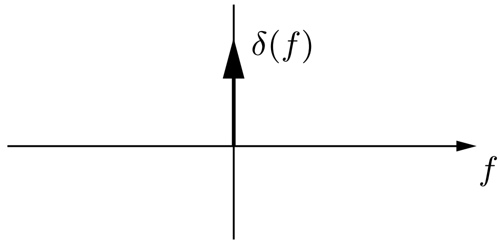
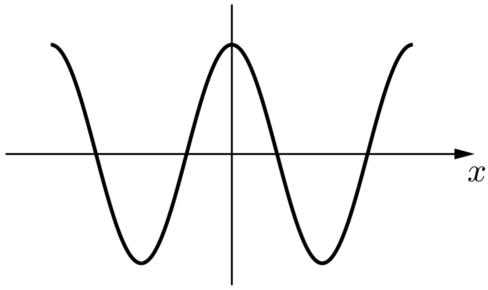
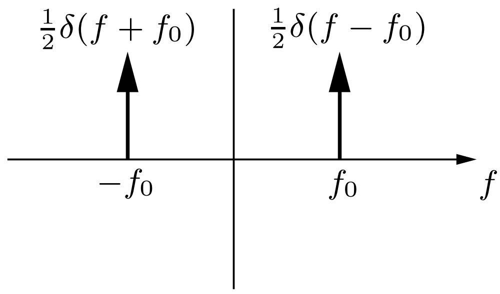
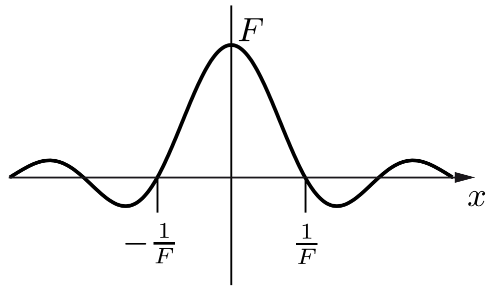
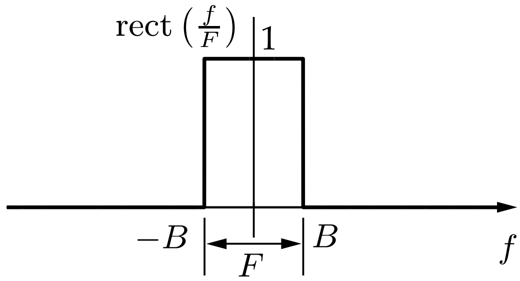
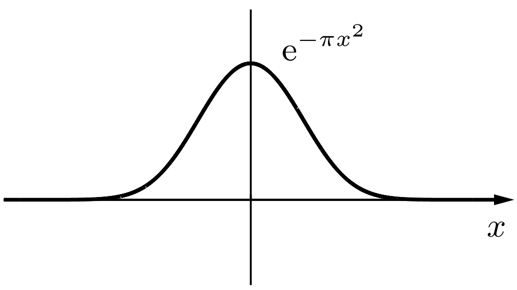
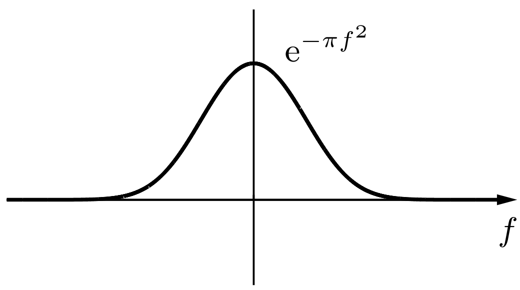
$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ $\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathrm{d}f_1 \mathrm{d}f_2 \dots \mathrm{d}f_n$

1.3 Gesetze der eindimensionalen Fouriertransformation

Gesetz	$g(x)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$G(f)$
Linearität	$a\,g_1(x) + b\,g_2(x)$	$a\,G_1(f) + b\,G_2(f)$
Ähnlichkeitssatz	$g(kx)$ mit k reell, $k \neq 0$	$\|k\|^{-1}\,G\big(\frac{f}{k}\big)$
Vertauschungssatz	$G(x)$ $G^*(x)$	$g(-f)$ $g^*(f)$
Satz der konjugiert komplexen Funktionen	$g^*(x)$	$G^*(-f)$
Verschiebungssatz	$g(x - x_0)$ $g(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 x}$	$G(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi x_0 f}$ $G(f - f_0)$
Differentiationssatz	$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$ $-\mathrm{j}2\pi x\,g(x)$	$\mathrm{j}2\pi f\,G(f)$ $\frac{\mathrm{d}G(f)}{\mathrm{d}f}$
Integrationssatz	$\int_{-\infty}^{x} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ $\left[\frac{-1}{\mathrm{j}2\pi x} + \frac{1}{2}\,\delta(x)\right] u(x)$	$\left[\frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} + \frac{1}{2}\,\delta(f)\right] U(f)$ $\int_{-\infty}^{f} U(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$
Faltungssatz	$g_1(x) * g_2(x)$ $g_1(x)\,g_2(x)$	$G_1(f)\,G_2(f)$ $G_1(f) * G_2(f)$
Korrelationssatz $g_1(x) \circledast g_2(x) := g_1(x) * g_2^*(-x)$	$g_1(x) \circledast g_2(x)$ $g_1(x)\,g_2^*(x)$	$G_1(f)\,G_2^*(f)$ $G_1(f) \circledast G_2(f)$
Zuordnungssatz Index: – g: gerader Anteil – u: ungerader Anteil	$\Re\{g_\mathrm{g}(x)\}$ $\Re\{g_\mathrm{u}(x)\}$ $\mathrm{j}\,\Im\{g_\mathrm{g}(x)\}$ $\mathrm{j}\,\Im\{g_\mathrm{u}(x)\}$	$\Re\{G_\mathrm{g}(f)\}$ $\mathrm{j}\,\Im\{G_\mathrm{u}(f)\}$ $\mathrm{j}\,\Im\{G_\mathrm{g}(f)\}$ $\Re\{G_\mathrm{u}(f)\}$
Momentensatz	$\int_{-\infty}^{\infty} x^\nu\,g(x)\,\mathrm{d}x = (-\mathrm{j}2\pi)^{-\nu}\,\frac{\mathrm{d}^\nu G(f)}{\mathrm{d}f^\nu}\Big\|_{f=0}$ $(\mathrm{j}2\pi)^{-\nu}\,\frac{\mathrm{d}^\nu g(x)}{\mathrm{d}x^\nu}\Big\|_{x=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f^\nu\,G(f)\,\mathrm{d}f$	
Nullwerte	$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,\mathrm{d}f \qquad G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$	
Parseval'sche Gleichung (Gleichheit der Energie in Orts- und Frequenzbereich	$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\,g_2^*(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f)\,G_2^*(f)\,\mathrm{d}f$ $\int_{-\infty}^{\infty} \|g(x)\|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \|G(f)\|^2\,\mathrm{d}f$	

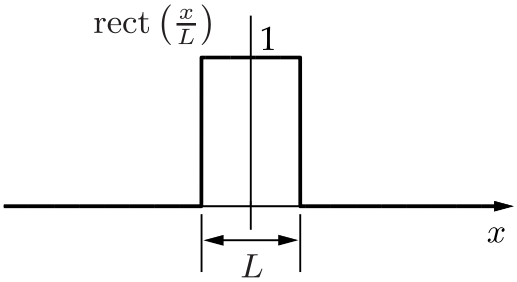
1.4 Korrespondenzen

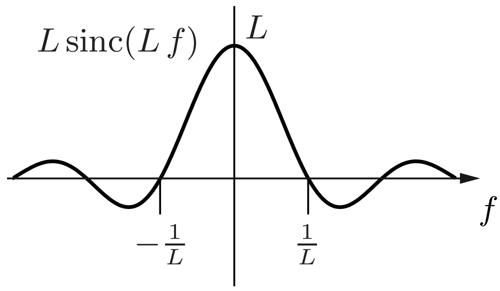
Ortsbereich $g(x)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$ $G(f)$ Frequenzbereich
Einheitssprung: $\mathrm{H}(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$	$(\mathrm{j}2\pi f)^{-1} + \frac{1}{2}\delta(f)$
Rechteckfunktion: $\mathrm{rect}\left(\frac{x}{L}\right) := \begin{cases} 0 & \text{für } \lvert x\rvert > \frac{L}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } \lvert x\rvert = \frac{L}{2} \\ 1 & \text{für } \lvert x\rvert < \frac{L}{2} \end{cases}$	$L\,\mathrm{sinc}(Lf)$ mit $\mathrm{sinc}(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
Vorzeichenfunktion: $\mathrm{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$	$(\mathrm{j}\pi f)^{-1}$
Dreiecksfunktion: $\Lambda\left(\frac{x}{L}\right) := \begin{cases} 1 - \left\lvert\frac{x}{L}\right\rvert & \text{für } \lvert x\rvert \leq L \\ 0 & \text{für } \lvert x\rvert > L \end{cases}$	$L\,\mathrm{sinc}^2(Lf)$
Harmonische Schwingungen: $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_0 x}$ $\cos(2\pi f_0 x)$ $\sin(2\pi f_0 x)$	 $\delta(f - f_0)$ $\frac{1}{2}\left[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right]$ $\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)\right]$
Impulsfolge: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta x)$	$\frac{1}{\Delta x} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{i}{\Delta x}\right)$
Besselfunktion: $J_0(2\pi a x)$	$\frac{1}{\pi}\left(a^2 - f^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2a}\right)$

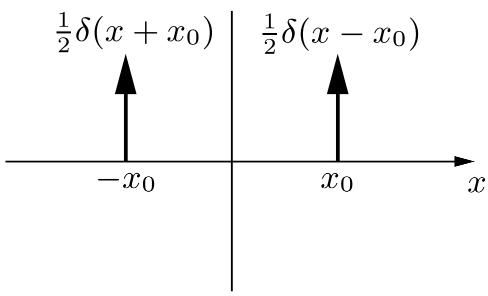
Korrespondenzen $g(x) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, G(f)$	
	
$\cos(2\pi f_0 x)$ 	
$F\,\mathrm{sinc}(Fx)$ 	
	

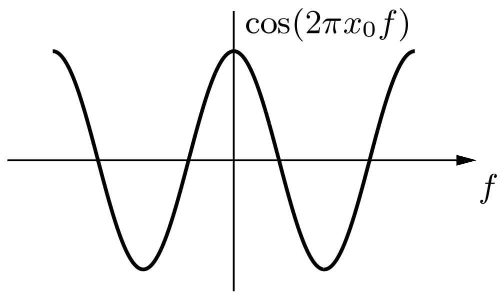
Korrespondenzen

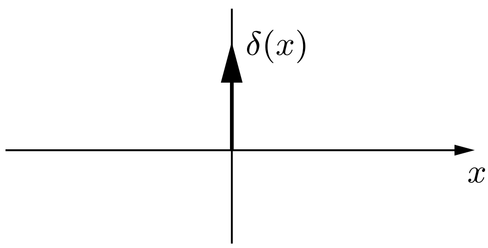
$g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(f)$

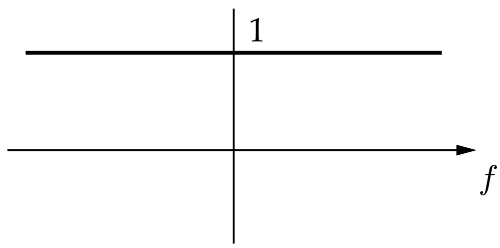


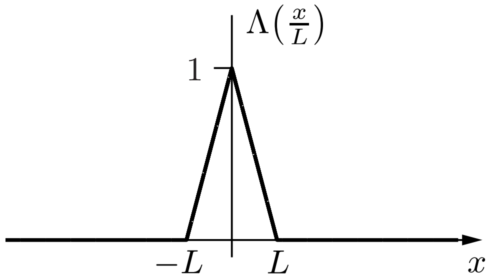


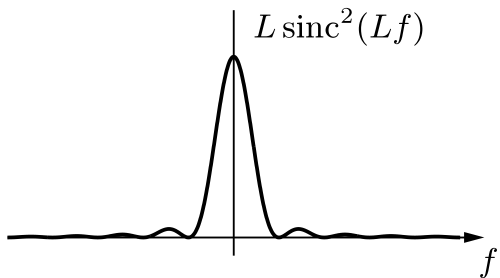












1.5 Rechengesetze für δ-Funktionen

Definition	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\, u(x)\, \mathrm{d}x = u(x_0)$ mit $u(x)$ stetig bei $x = x_0$
Orthogonalität	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_1)\, \delta(x - x_2)\, \mathrm{d}x = \delta(x_1 - x_2)$
Ausblend-eigenschaft	$\delta(x - x_0)\, u(x) = \delta(x - x_0)\, u(x_0)$
Koordinaten-transformation	$\delta(a(x)) = \sum\limits_{i=1}^{N} \lvert a'(x_i)\rvert^{-1}\, \delta(x - x_i)$ mit $a(x_i) = 0$ (einfache Nullstellen)
Ähnlichkeits-transformation	$\delta(k\, x) = \lvert k\rvert^{-1}\, \delta(x)$ mit k reell $\neq 0$
Faltung	$u(x) * \delta(x - x_0) = u(x - x_0)$
n-dimensionaler Dirac-Impuls	$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta(x_1)\, \delta(x_2) \ldots \delta(x_n)\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

2 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Definition: $$G_l := \sum_{n=0}^{N-1} g_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{ln}{N}} \qquad \text{mit} \qquad g_n := g(n\,\Delta x)$$

Umkehrung: $$g_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} G_l \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \frac{ln}{N}}$$

2.1 Gesetze der DFT

Gesetz	$g_n \quad \underset{\mathrm{DFT}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	G_l
Linearität	$a\,g_n + b\,h_n$	$a\,G_l + b\,H_l$
Symmetrie	$\frac{1}{N} G_l$	g_{-n}
Ortsverschiebung	g_{n-p}	$G_l\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{lp}{N}}$
Frequenzverschiebung	$g_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \frac{np}{N}}$	G_{l-p}
Faltung (zyklisch)	$k_n = \sum_{\nu=0}^{N-1} g_{\nu \bmod N}\, h_{(n-\nu) \bmod N} = g_n \underset{\substack{\uparrow \\ zyklisch}}{*} h_n$	
Faltungssatz	$g_n \underset{\substack{\uparrow \\ zyklisch}}{*} h_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G_l \cdot H_l$ $g_n \cdot h_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{N} G_l \underset{\substack{\uparrow \\ zyklisch}}{*} H_l$	
Korrelation (zyklisch)	$k_n = \sum_{\nu=0}^{N-1} g_{\nu \bmod N}\, h_{(\nu+n) \bmod N} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G_k^* \cdot H_k$	
Parseval'sche Gleichung	$\sum_{n=0}^{N-1} g_n^2 = \sum_{l=0}^{N-1} \lvert G_l \rvert^2$	

3 Gesetze der n-dimensionalen Fouriertransformation

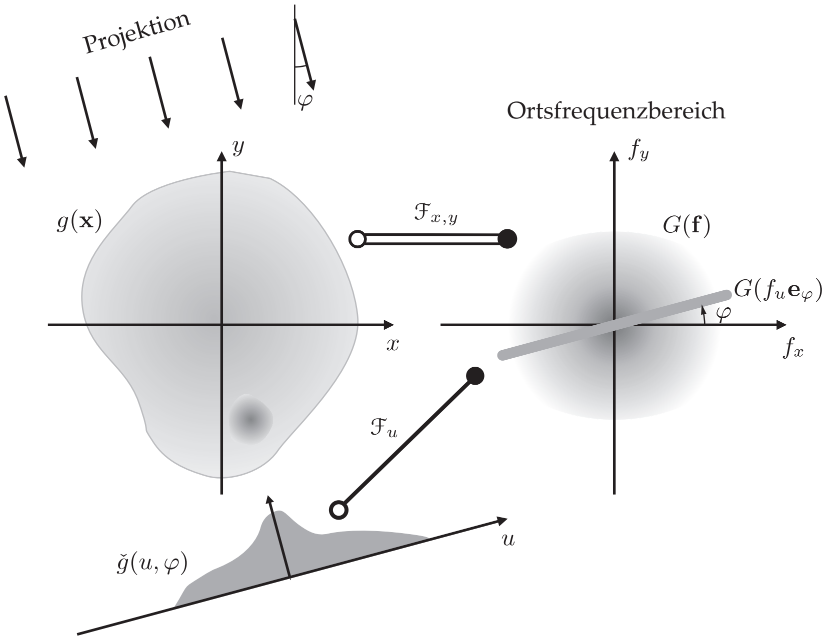
Gesetz	$g(\mathbf{x})$ $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$	$G(\mathbf{f})$
lineare Koordinaten-transformation	$g(\mathbf{A}\mathbf{x})$	$\lvert\det \mathbf{A}\rvert^{-1}\, G\big(\mathbf{B}\mathbf{f}\big)$ mit $\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$
Vertauschungssatz	$G(\mathbf{x})$ $G^*(\mathbf{x})$	$g(-\mathbf{f})$ $g^*(\mathbf{f})$
Satz der konjugiert komplexen Funktionen	$g^*(\mathbf{x})$	$G^*(-\mathbf{f})$
Verschiebungssatz	$g(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ $g(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathbf{f}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$	$G(\mathbf{f})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{f}}$ $G(\mathbf{f}-\mathbf{f}_0)$
Differentiationssatz	$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ $-\mathrm{j}2\pi x_i\, g(\mathbf{x})$	$\mathrm{j}2\pi f_i\, G(\mathbf{f})$ $\frac{\partial G(\mathbf{f})}{\partial f_i}$
Integrationssatz	$\int_{-\infty}^{x_i} g(x_1,\dots,\xi_i,\dots,x_n)\,\mathrm{d}\xi_i$ $\left[\frac{-1}{\mathrm{j}2\pi x} + \frac{1}{2}\,\delta(x_i)\right] g(\mathbf{x})$	$\left[\frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} + \frac{1}{2}\,\delta(f_i)\right] G(\mathbf{f})$ $\int_{-\infty}^{f_i} G(f_1,\dots,\varphi_i,\dots,f_n)\,\mathrm{d}\varphi_i$
Faltung bezüglich *aller* Variablen	$g_1(\mathbf{x}) * g_2(\mathbf{x})$	$G_1(\mathbf{f})\, G_2(\mathbf{f})$
Faltungssatz	$g_1(\mathbf{x})\, g_2(\mathbf{x})$	$G_1(\mathbf{f}) * G_2(\mathbf{f})$
partielle Faltung	$g_1(\mathbf{x}) \overset{x_a}{*}\overset{x_b}{*} \dots \overset{x_g}{*} g_2(\mathbf{x})$	$G_1(\mathbf{f}) \overset{f_h}{*}\overset{f_i}{*} \cdots \overset{f_m}{*} G_2(\mathbf{f})$ $\{a,b,\dots,g\}\cap\{h,i,\dots,m\} = \varnothing$
Korrelationssatz	$g_1(\mathbf{x}) \circledast g_2(\mathbf{x})$ $g_1(\mathbf{x})\, g_2^*(\mathbf{x})$	$G_1(\mathbf{f})\, G_2^*(\mathbf{f})$ $G_1(\mathbf{f}) \circledast G_2(\mathbf{f})$
Separationssatz	$g(\mathbf{x}) = g_1(x_1)\cdots g_n(x_n)$	$G(\mathbf{f}) = G_1(f_1)\cdots G_n(f_n)$
Momentensatz	$\int_{-\infty}^{\infty} x_i^{\nu}\, g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i$ $(\mathrm{j}2\pi)^{\nu}\, \frac{\partial^{\nu} g(\mathbf{x})}{\partial x_i^{\nu}}\delta(f_i)$	$(-\mathrm{j}2\pi)^{-\nu}\, \frac{\partial^{\nu} G(\mathbf{f})}{\partial f_i^{\nu}}\delta(f_i)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f_i^{\nu}\, G(\mathbf{f})\,\mathrm{d}f_i$
Sonderfall ($\nu = 0$): (Projektionssatz)	$\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i$	$G(f_1,\dots,f_i=0,\dots,f_n)\delta(f_i)$ und umgekehrt
Rotationssymmetrische Signale und Spektren	$g(\mathbf{x}) = g_r(r)$ mit $r := \lVert\mathbf{x}\rVert \Rightarrow G(\mathbf{f}) = G_{f_r}(f_r)$ mit $f_r := \lVert\mathbf{f}\rVert$ $G_{f_r}(f_r) = 2\pi f_r^{1-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} r^{\frac{n}{2}}\, g_r(r) J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi r f_r)\,\mathrm{d}r$ $g_r(r) = 2\pi r^{1-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} f_r^{\frac{n}{2}}\, G_{f_r}(f_r) J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi r f_r)\,\mathrm{d}f_r$ mit $J_p(.)$: Besselfunktion p-ter Ordnung	

Parseval'sche Gleichung (Gleichheit der Energie in Orts- und Frequenzbereich)	$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\mathbf{x})\, g_2^*(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\mathbf{f})\, G_2^*(\mathbf{f})\, \mathrm{d}\mathbf{f}$ $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \lvert g(\mathbf{x})\rvert^2\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \lvert G(\mathbf{f})\rvert^2\, \mathrm{d}\mathbf{f}$	
Zuordnungssatz	$\Re\{g_\mathrm{g}(\mathbf{x})\}$	$\Re\{G_\mathrm{g}(\mathbf{f})\}$
Index:	$\Re\{g_\mathrm{u}(\mathbf{x})\}$	$\mathrm{j}\,\Im\{G_\mathrm{u}(\mathbf{f})\}$
– g: gerader Anteil	$\mathrm{j}\,\Im\{g_\mathrm{g}(\mathbf{x})\}$	$\mathrm{j}\,\Im\{G_\mathrm{g}(\mathbf{f})\}$
– u: ungerader Anteil	$\mathrm{j}\,\Im\{g_\mathrm{u}(\mathbf{x})\}$	$\Re\{G_\mathrm{u}(\mathbf{f})\}$

3.1 Zentralschnitt-Theorem $(n = 2)$

$$G(f_u \mathbf{e}_\varphi) = \mathcal{F}_u \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{e}_\varphi^{\mathrm{T}} \mathbf{x} - u) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{e}_\varphi^{\mathrm{T}} \mathbf{x} - u) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_u u} \, \mathrm{d}u$$

$\mathbf{e}_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi)^{\mathrm{T}}$, $\quad f_u \in \mathbb{R}$: mit u korrespondierende Frequenz



mit

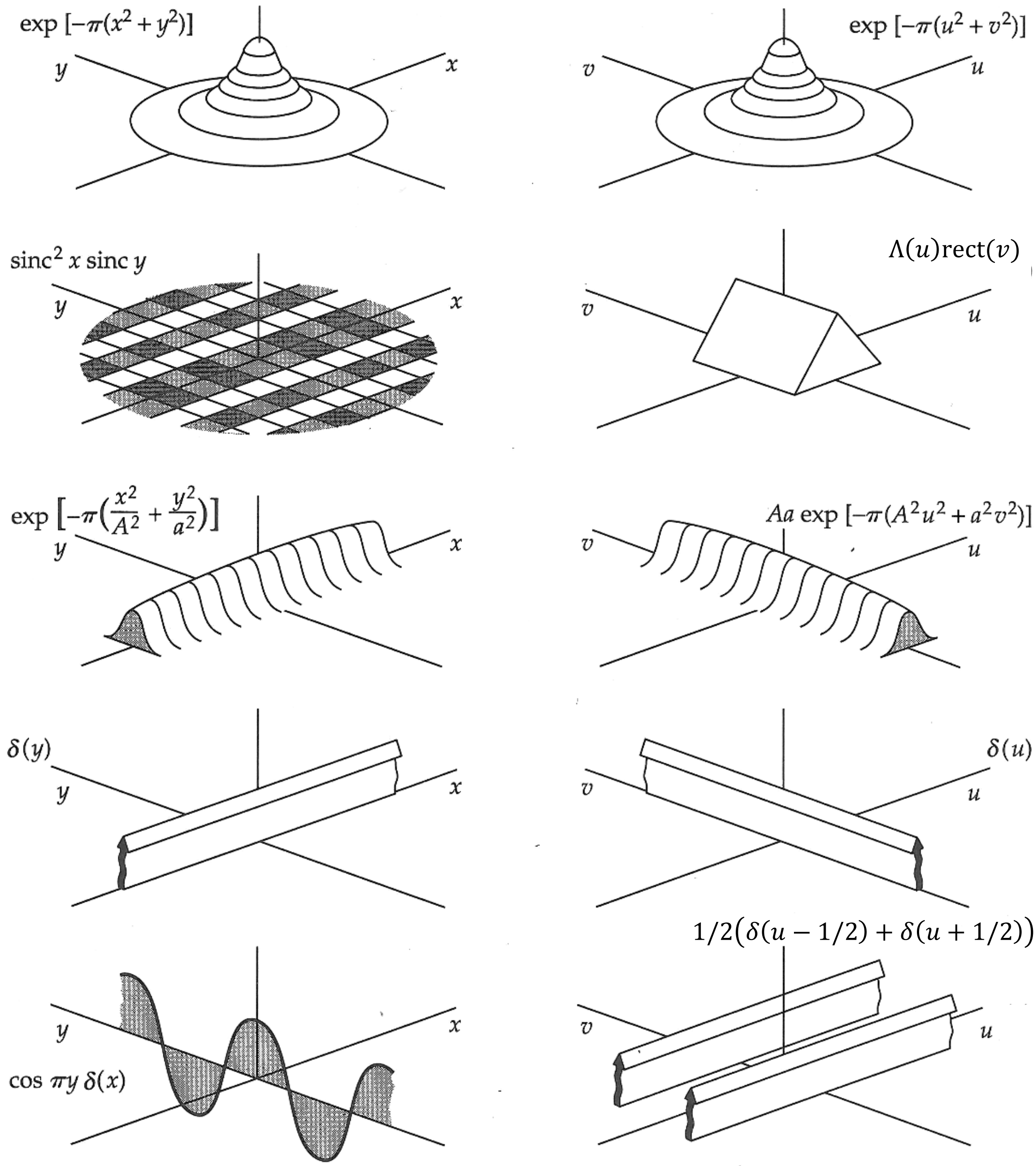
$$\breve{g}(u, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{e}_\varphi^{\mathrm{T}} \mathbf{x} - u) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

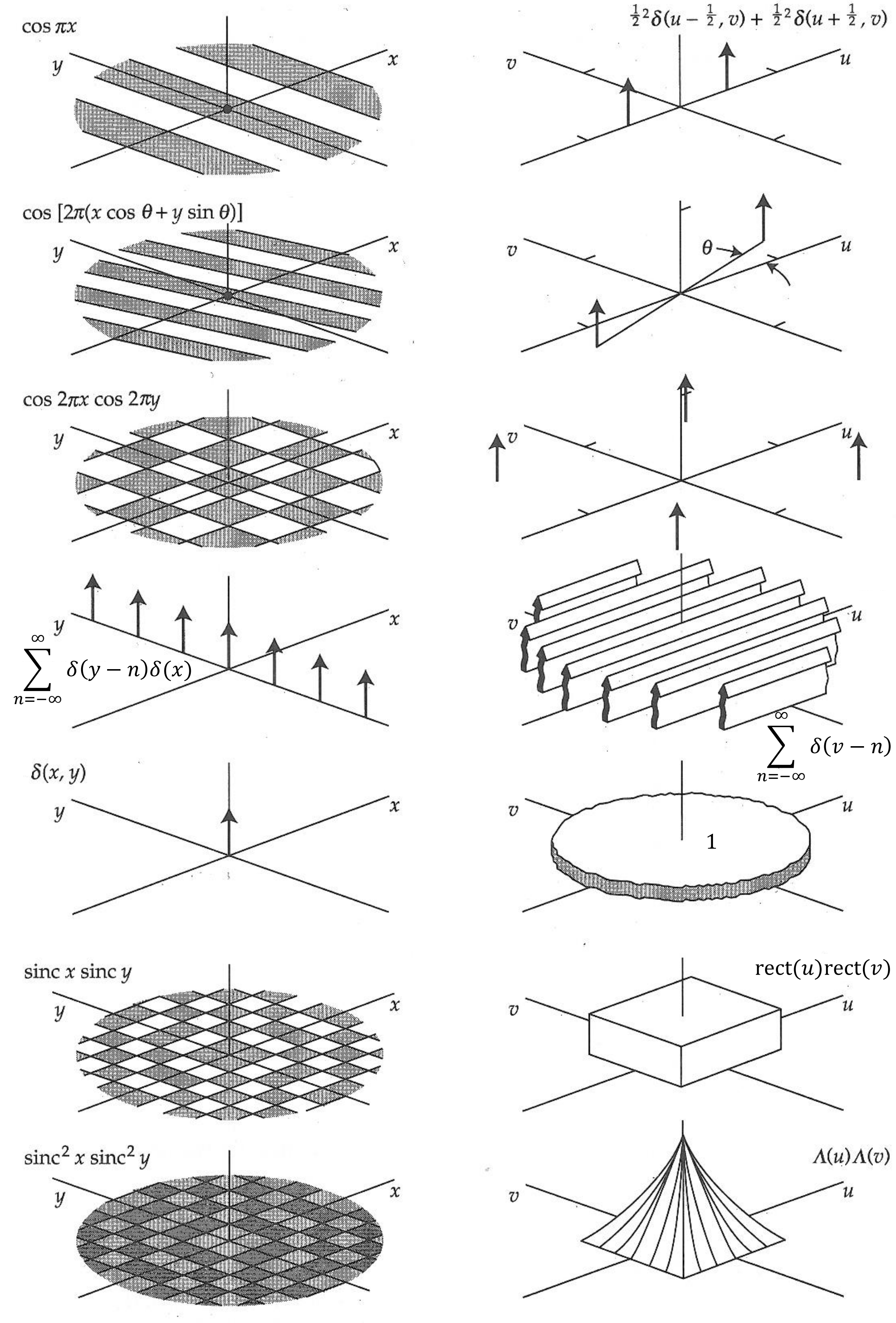
Eigenschaften		$g(\mathbf{x})$ ○—● $G(\mathbf{f})$
reell	gerade	○——●
	ungerade	○——●
imaginär	ungerade	○——●
	gerade	○——●

3.2 Korrespondenzen $(n = 2)$

δ-Funktion: $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{f}}$
δ-Gerade (Messerfunktion): $\delta(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} - d)$ $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} - d = 0$: Hessesche Normalform einer Geraden $\mathbf{n}$: Normalenvektor, d: Ursprungsabstand	$\delta(\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}_{\perp})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}}$ $\lVert\mathbf{n}\rVert = \lVert\mathbf{n}_{\perp}\rVert = 1, \qquad \mathbf{n}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}_{\perp} = 0$
$\mathrm{rect}\left(\frac{\lVert\mathbf{x}\rVert}{d}\right)$	$\frac{d}{2}\frac{J_1(\pi d\lVert\mathbf{f}\rVert)}{\lVert\mathbf{f}\rVert}$

Aus R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*: $(u = f_x, v = f_y)$




$\cos \pi x$
$\frac{1}{2}{}^2\delta(u-\frac{1}{2}, v) + \frac{1}{2}{}^2\delta(u+\frac{1}{2}, v)$
$\cos [2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)]$
θ
$\cos 2\pi x \cos 2\pi y$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y-n)\delta(x)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$
$\delta(x, y)$
1
$\text{sinc}\, x \,\text{sinc}\, y$
$\text{rect}(u)\text{rect}(v)$
$\text{sinc}^2 x \,\text{sinc}^2 y$
$\Lambda(u)\Lambda(v)$